МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ)

ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕУЧРЕЖДЕНИЕ РЕСПУБЛИКИ САХА (ЯКУТИЯ) «РЕГИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ В Г. МИРНОМ» «УДАЧНИНСКИЙ ГОРНОТЕХНИЧЕСКИЙ ФИЛИАЛ»

РАССМОТРЕНО И РЕКОМЕНДОВАННО
К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ
на заседании МО филиала «Удачнинский»
ГАПОУ РС(Я) «МРТК»
Протокол №34
от «19» _05_2021 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ « МАТЕМАТИКА»

для студентов I курса ППКРС очной формы обучения

г. Удачный, 2021г.

Аннотация

Методические рекомендации предназначены для студентов очной формы обучения, изучающих дисциплину «Математика» .

Данное пособие предназначено для студентов профессиональных образовательных организациях СПО, реализующих образовательную программу среднего общего образования в пределах освоения основной профессиональной образовательной программы СПО (ОПОП СПО) на базе основного общего образования при подготовке квалифицированных рабочих, служащих и специалистов среднего звена.

По каждой теме представлены методические указания для обучающихся по выполнению внеаудиторных самостоятельных работ. Также методическое пособие содержит справочный материал, необходимый для выполнения внеаудиторных самостоятельных работ, предусмотренных программой учебной дисциплины ОДП 01. «Математика», состоящей из двух разделов: алгебры и математического анализа и геометрии.

Общеинтеллектуальные умения и навыки, приобретенные при выполнении внеаудиторной самостоятельной работы, окажутся востребованными при изучении общепрофессиональных дисциплин.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студентов – это работа, которая выполняется ими по заданию преподавателя, без его непосредственного участия (но под его руководством) в специально представленное для этого время.

Самостоятельная работа студентов проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;
- формирования готовности к поиску, обработке и применению информации для решения профессиональных задач;
- развития познавательных способностей и активности студентов, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- формирования умений использовать справочную и специальную литературу;
- выработка навыков эффективной самостоятельной профессиональной деятельности.

Успешная внеаудиторная самостоятельная работа возможна при наличии следующих условий: обучающийся должен быть подготовлен к осуществлению самостоятельной деятельности (морально готов к необходимости такой деятельности); необходима позитивная мотивация получения новых знаний в конкретной области познания; наличие и доступность необходимого научного, учебно-методического и справочного материала; обеспечение преподавателем консультационной помощи; системный и систематический само- и внешний контроль уровня достижений обучающегося в реализуемой им самостоятельной познавательной деятельности во внеаудиторное время.

Создание эффективной системы внеаудиторной самостоятельной работы обеспечивает достижение студентами следующих ***результатов***:

• ***личностных*:**

– развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;

– овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественно-научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

– готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;

– готовность и способность к самостоятельной творческой и ответственной деятельности;

• ***метапредметных***:

– умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;

– владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

– готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

– владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;
– владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения;
– целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира;

• ***предметных*:**

– сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;
– владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;
– владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
– сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

Перед выполнением студентами внеаудиторной самостоятельной работы преподаватель проводит инструктаж по выполнению задания, который включает цель задания, его содержание, сроки выполнения, ориентировочный объем работы, основные требования к результатам работы, критерии оценки. В процессе инструктажа преподаватель предупреждает студентов о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

В качестве **форм и методов контроля** внеаудиторной самостоятельной работы студентов используются семинарские занятия, зачеты, тестирование, самоотчеты, контрольные работы.

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы студента являются:

- уровень освоения студентом учебного материала;
- умение студента использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- сформированность общеучебных умений;
- уровень умения активно использовать электронные образовательные ресурсы, находить требующуюся информацию, изучать ее и применять на практике
- обоснованность и четкость изложения ответа;
- оформление материала в соответствии с требованиями.
- уровень умения четко сформулировать проблему, предложив ее решение, критически оценить решение и его последствия;
- уровень умения определить, проанализировать альтернативные возможности, варианты действий;
- уровень умения сформулировать собственную позицию, оценку и аргументировать ее.

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы рассчитаны на 142 часа.

РАЗДЕЛ 1. ПОВТОРЕНИЕ

Целью повторения курса алгебры является обобщение и систематизация знаний, полученных учащимися в VII-IX классах. На этих занятиях учащиеся должны усвоить связи и отношения между понятиями, получить целостное представление об изученном материале, решить ряд комбинированных задач и упражнений.

Основные понятия и формулы, необходимые при выполнении самостоятельных работ:

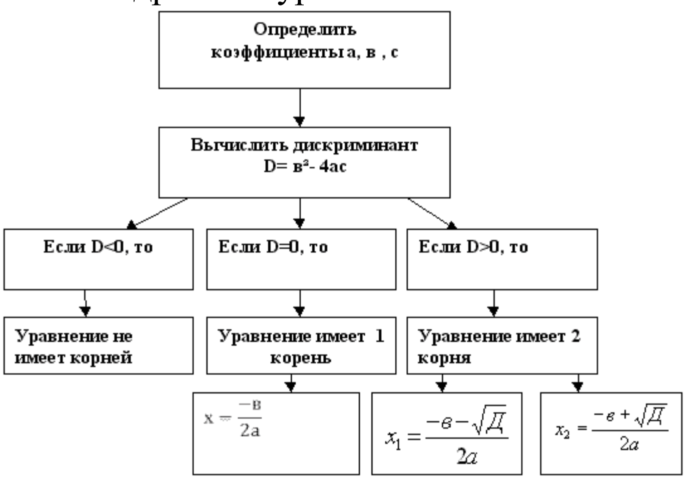
1. Формулы сокращенного умножения

Название	*Формула*
Квадрат суммы	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат разности	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Куб суммы	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Куб разности	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2. Квадраты целых чисел от 0 до 99

x^2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

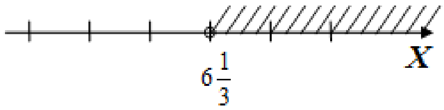
3. Алгоритм решения квадратных уравнений



4. Решение линейных неравенств

Пример 1: *Решить неравенство*

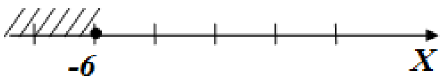
$$3x-2>17$$
$$3x>17+2$$
$$3x>19$$
$$3x:3>19:3$$
$$x>\frac{19}{3}$$



Ответ: $x>6\frac{1}{3}$ *или* $x\in\left(6\frac{1}{3};\ +\infty\right)$

Пример 2:

$$7-5x\geq 37$$
$$-5x\geq 37-7$$
$$-5x:(-5)\leq 30:(-5)$$
$$x\leq -6$$



Ответ: $x\leq -6$ *или* $x\in(-\infty;\ -6]$

5. Решение квадратных неравенств

Неравенство вида

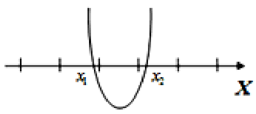
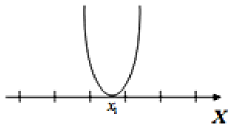
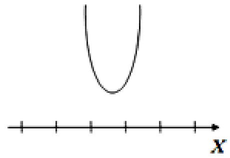
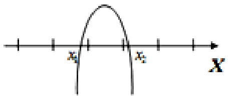
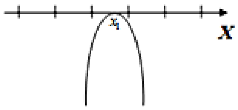
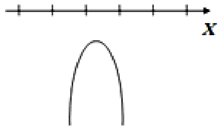
$$ax^2+bx+c>0$$

$$\left(ax^2+bx+c\geq 0,\ ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c\leq 0\right)$$

где **x** - переменная, **a, b, c** - числа, $a\neq 0$, называется *квадратным.*

При решении квадратного неравенства необходимо найти корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Для этого необходимо найти дискриминант данного квадратного уравнения. Можно получить 3 случая: 1) **D=0**, квадратное уравнение имеет один корень; 2) **D>0** квадратное уравнение имеет два корня; 3) **D<0** квадратное уравнение не имеет корней.

В зависимости от полученных корней и знака коэффициента **a** возможно одно из шести расположений графика функции $y=ax^2+bx+c$

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$			
$a<0$			

Если требуется найти **числовой промежуток,** на котором квадратный трехчлен ax^2+bx+c больше нуля, то это числовой промежуток находится там, где парабола лежит выше оси ОХ.

Если требуется найти числовой промежуток, на котором квадратный трехчлен ax^2+bx+c меньше нуля, то это числовой промежуток, где парабола лежит ниже оси ОХ.

Если квадратное неравенство нестрогое, то корни входят в числовой промежуток, если строгое - не входят.

Такой метод решения квадратного неравенства называется **графическим**.

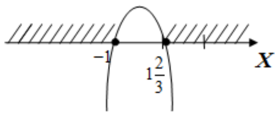
Пример 1: Решить неравенство

$$-3x^2+2x+5\le 0$$

$$D=2^2-4\cdot(-3)5=64$$

$$x_1=\frac{-2+\sqrt{64}}{2\cdot(-3)}=-1\quad x_2=\frac{-2-\sqrt{64}}{2\cdot(-3)}=\frac{-10}{-6}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$$

изображаем параболу, отмечаем промежутки, где она ниже оси OX, так как "$\le$"



Ответ: $\left(-\infty;\ 1\right]\cup\left[1\frac{2}{3};\ +\infty\right)$

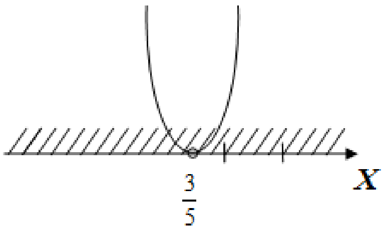
Пример 2: Решить неравенство

$$25x^2-30x+9>0$$

$$D=(-30)^2-4\cdot 25\cdot 9=0$$

$$x_{1,2}=\frac{30}{2\cdot(25)}=\frac{3}{5}$$

изображаем параболу, отмечаем промежутки, где она выше OX, так как "$>$"



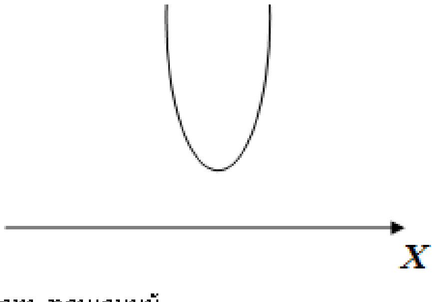
Ответ: $\left(-\infty;\ \frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{5};\ +\infty\right)$

Пример 3: Решить неравенство

$$2x^2+4x+3<0$$

$$D=(4)^2-24=-8<0$$

изображаем параболу, отмечаем промежутки, где она ниже OX, так как "$<$"



Ответ: нет решений

РАЗДЕЛ 2. Тригонометрические функции

В результате изучения данной темы студент должен:

знать/понимать:

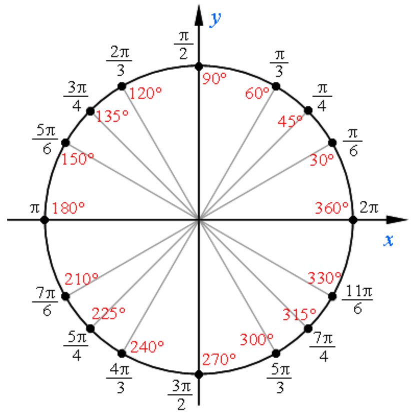
- понятие числовой окружности на координатной плоскости;
- понятия синуса и косинуса, их свойства;
- определение тангенса и котангенса, их свойства;
- понятие тригонометрической функции числового аргумента;
- основные формулы одного аргумента тригонометрических функций;
- понятие тригонометрической функции углового аргумента;
- понятие радианной меры угла;
- формулы приведения;
- формулы синуса, косинуса, тангенса, котангенса суммы и разности аргументов;
- формулы двойного аргумента;
- формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение
- формулы преобразования тригонометрических функций в сумму;
- алгоритм преобразования графиков тригонометрических функций;
- простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.

уметь:

- составлять таблицу значений; находить на числовой окружности точки с конкретным значением абсциссы и ординаты, определять каким числам они соответствуют;
- составить таблицу значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса;
- упрощать выражения с применением основных формул одного аргумента тригонометрических функций;
- переводить радианную меру угла в градусную и наоборот;
- решать задания на применение формул приведения;
- строить графики тригонометрических функций;

- решать уравнения cosa = t, sin a = t, tg a = t, ctg a = t;
- решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства.

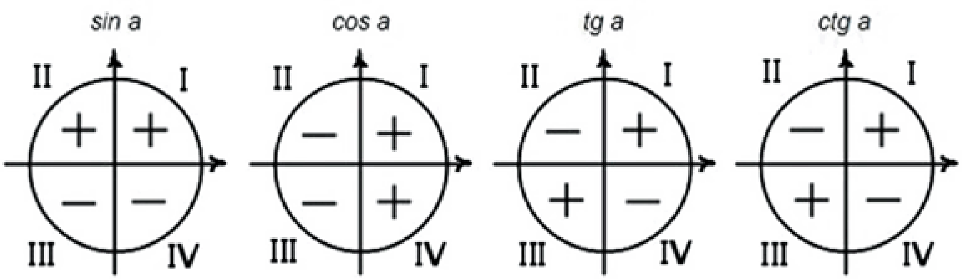
1. Числовая окружность на координатной плоскости



2. Таблица значений тригонометрических функций

α / функции	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

3. Знаки тригонометрических функций по координатным четвертям



4. Основные тригонометрические формулы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$$

$$ctg\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi k, \quad k \in Z.$$

$$tg\ \alpha \cdot ctg\ \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z.$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z.$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi k, \quad k \in Z.$$

5. Формулы приведения

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\cos a$	$\sin(\pi+a)=-\sin a$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\cos a$	$\sin(2\pi+a)=\sin a$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\sin a$	$\cos(\pi+a)=-\cos a$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=\sin a$	$\cos(2\pi+a)=\cos a$
$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\mathrm{ctg}\, a$	$\mathrm{tg}\,(\pi+a)=\mathrm{tg}\, a$	$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\mathrm{ctg}\, a$	$\mathrm{tg}\,(2\pi+a)=\mathrm{tg}\, a$
$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=-\mathrm{tg}\, a$	$\mathrm{ctg}\,(\pi+a)=\mathrm{ctg}\, a$	$\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+a\right)=-\mathrm{tg}\, a$	$\mathrm{ctg}\,(2\pi+a)=\mathrm{ctg}\, a$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a$	$\sin(\pi-a)=\sin a$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=-\cos a$	$\sin(2\pi-a)=-\sin a$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin a$	$\cos(\pi-a)=-\cos a$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=-\sin a$	$\cos(2\pi-a)=\cos a$
$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\mathrm{ctg}\, a$	$\mathrm{tg}\,(\pi-a)=-\mathrm{tg}\, a$	$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=\mathrm{ctg}\, a$	$\mathrm{tg}\,(2\pi-a)=-\mathrm{tg}\, a$
$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\mathrm{tg}\, a$	$\mathrm{ctg}\,(\pi-a)=-\mathrm{ctg}\, a$	$\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)=\mathrm{tg}\, a$	$\mathrm{ctg}\,(2\pi-a)=-\mathrm{ctg}\, a$

6. Примеры на применение формул сложения аргументов тригонометрических функций

Формулы сложения

ФОРМУЛЫ	ОБРАЗЦЫ	ЗАДАНИЯ
$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$, $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$, $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$, $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$, $\mathrm{tg}(x+y)=\dfrac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}$, $\mathrm{tg}(x-y)=\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y}{1+\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}$.	**1) Преобразуем по формулам выражение** $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$. ***Решение:*** **Воспользуемся формулой косинуса суммы:** $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x=$ $=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$. **2) Вычислим** $\mathrm{tg}\,15°$. ***Решение:*** **Так как** $15°=45°-30°$, **воспользуемся формулой тангенса разности:** $\mathrm{tg}\,15°=\mathrm{tg}(45°-30°)=\dfrac{\mathrm{tg}\,45°-\mathrm{tg}\,30°}{1+\mathrm{tg}\,45°\,\mathrm{tg}\,30°}=$ $=\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$.	**Преобразовать по формулам сложения:** **1)** $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$; **2)** $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$. **Вычислить:** **3)** $\sin 75°$; **4)** $\cos 105°$; **5)** $\mathrm{tg}\,150°$. **Преобразовать по формулам сложения:** **6)** $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; **7)** $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$. **Вычислить:** **8)** $\sin 150°$; **9)** $\cos 75°$; **10)** $\mathrm{tg}\,105°$. **Преобразовать по формулам сложения:** **11)** $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$; **12)** $\mathrm{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. **Вычислить:** **13)** $\sin 105°$; **14)** $\cos 150°$; **15)** $\mathrm{tg}\,75°$.

7. Формулы двойного аргумента

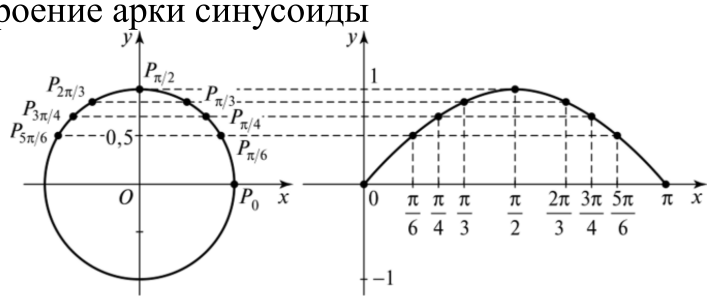
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\qquad$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{(2\mathrm{tg}\,\alpha)}{(1-\mathrm{tg}^2\alpha)}$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{ctg}\,2\alpha = \dfrac{(\mathrm{ctg}^2\alpha - 1)}{(2\mathrm{ctg}\,\alpha)}$

8. Построение графиков тригонометрических функций

а) Построение арки синусоиды



б) Графики функций y=sinx, y=cosx

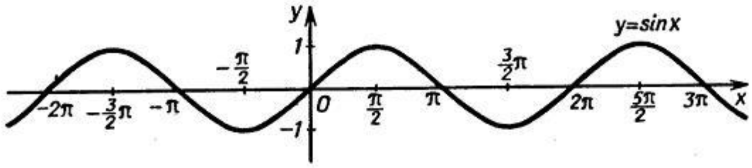
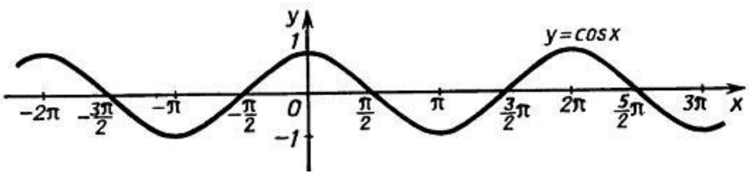
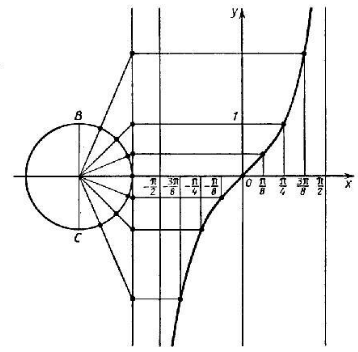


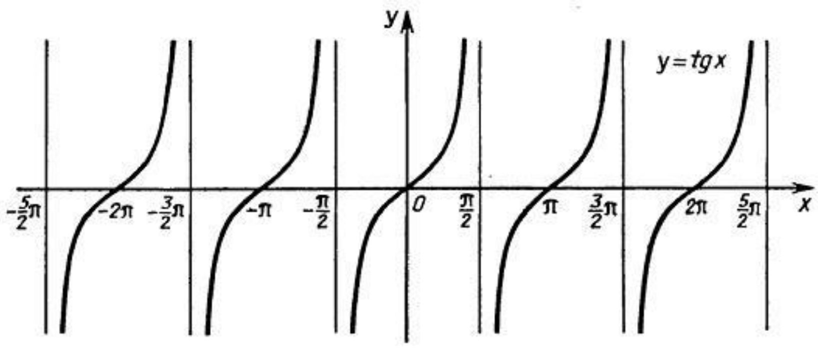
Рис. 8

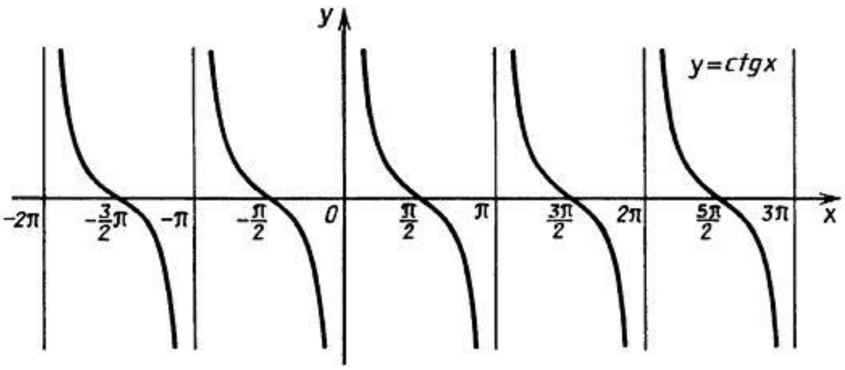


в) Построение главной ветви тангенсоиды



г) Графики функций y=tgx, y=ctgx





9. Преобразование графиков тригонометрических функций

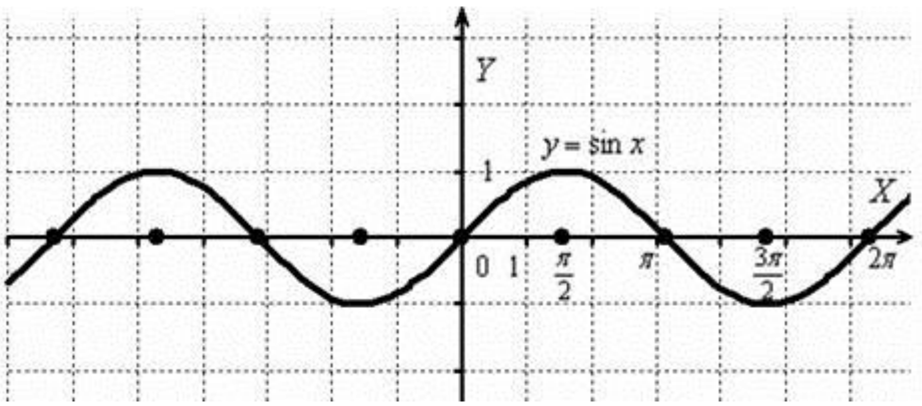
а) **Сжатие графика функции к оси ординат**

Правило: чтобы построить график функции $f(kx)$, где $k>1$, нужно график функции $f(x)$ **сжать к оси** OY в k раз.

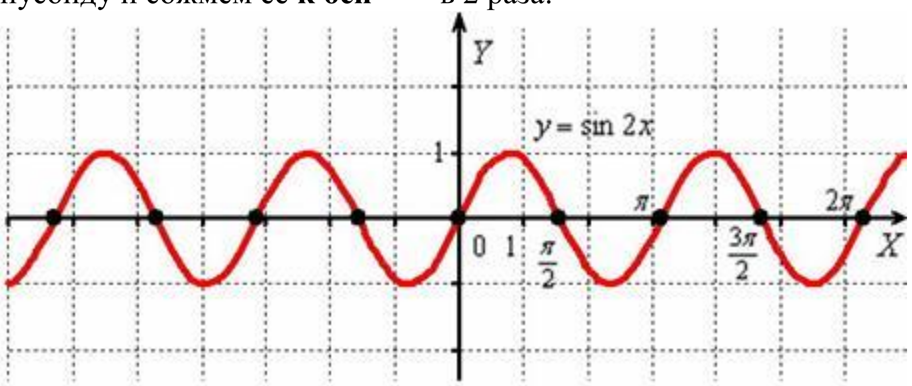
<u>Пример 1</u>

Построить график функции $y=\sin 2x$.

Сначала изобразим график синуса, его период равен $T=2\pi$:



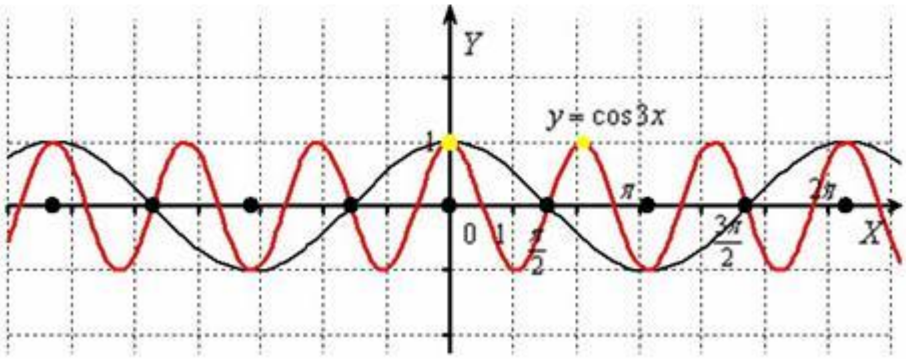
возьмём синусоиду и сожмём её **к оси** OY в 2 раза:



<u>Пример 2</u>

Построить график функции $y=\cos 3x$

$y = \cos x$ сжимается **к оси** OY в 3 раза:



Итоговый график $y = \cos 3x$ проведён красным цветом.

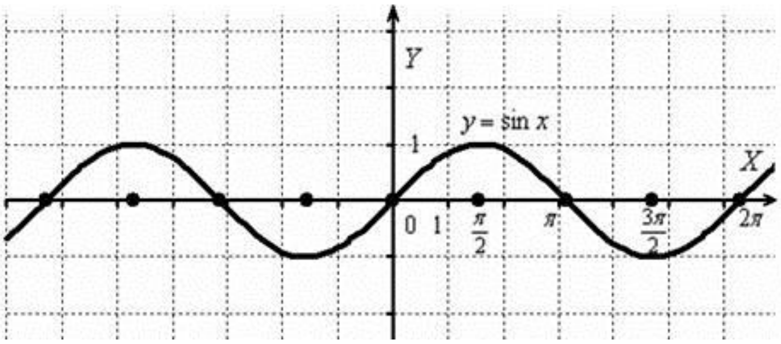
Исходный период $T = 2\pi$ косинуса закономерно уменьшается в три раза: $T = \frac{2\pi}{3}$ (ограничен жёлтыми точками).

б) Растяжение графика функции от оси ординат

Правило: чтобы построить график функции $f(kx)$, где $0 < k < 1$, нужно график функции $f(x)$ **растянуть от оси** OY в $\frac{1}{k}$ раз.

Пример 3

Построить график функции $y = \sin\frac{x}{2}$



Растягиваем $y = \sin\frac{x}{2}$ **от оси** OY в 2 раза:

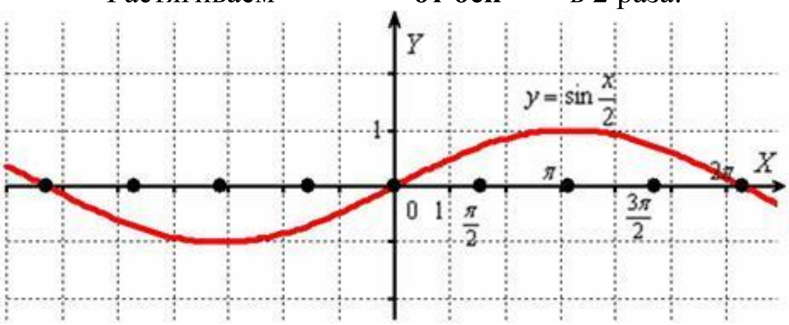


График функции $y=\sin\frac{x}{2}$ получается путём **растяжения** графика $y=\sin x$ **от оси ординат** в два раза.

в) Сдвиг графика влево/вправо вдоль оси абсцисс

Если к АРГУМЕНТУ функции прибавляется число, то происходит сдвиг (параллельный перенос) графика вдоль оси OX . Рассмотрим функцию $f(x)$ и положительное число b:

Правила:

1) чтобы построить график функции $f(x+b)$, нужно график $f(x)$ сдвинуть **ВДОЛЬ** оси OX на b единиц **влево**;

2) чтобы построить график функции $f(x-b)$, нужно график $f(x)$ сдвинуть **ВДОЛЬ** оси OX на b единиц **вправо**.

<u>Пример 4</u>

Построить график функции $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

График синуса $y=\sin x$ (чёрный цвет) сдвинем вдоль оси OX на $\frac{\pi}{2}$ **влево**:

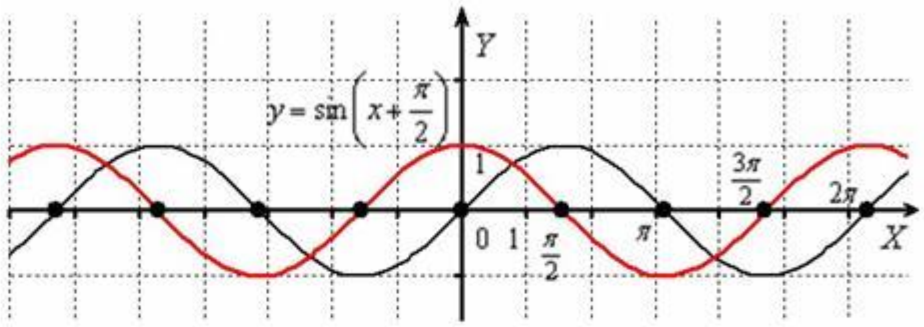


График $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ (красрый цвет)

График функции $y=\sin x$ сдвинут вдоль оси OX на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево

г) Растяжение графика (сжатие) ВДОЛЬ оси ординат

1) Если ФУНКЦИЯ $f(x)$ умножается на число $m>1$, то происходит **растяжение её графика вдоль оси ординат**.

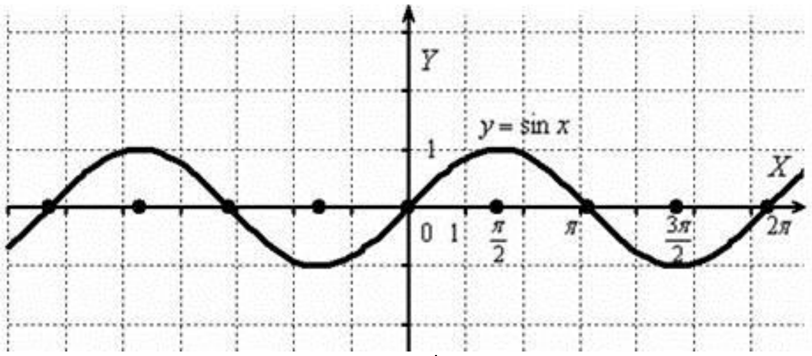
Правило: чтобы построить график функции $mf(x)$, где $m>1$, нужно график функции $f(x)$ **растянуть вдоль оси** OY в m раз.

2) Если ФУНКЦИЯ умножается на число $0<m<1$, то происходит **сжатие её графика вдоль оси ординат**.

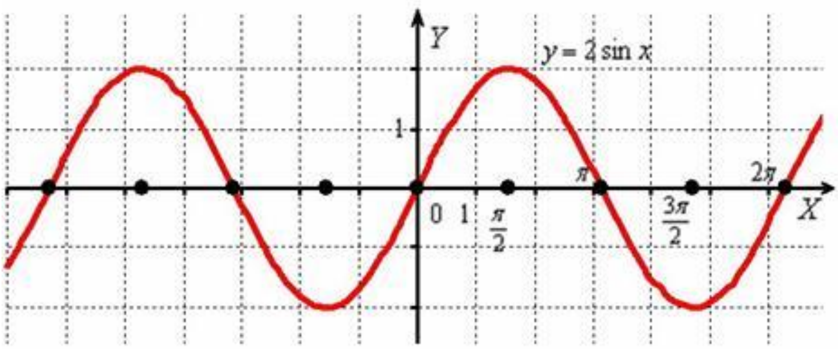
Правило: чтобы построить график функции $mf(x)$, где $0<m<1$, нужно график функции $f(x)$ **сжать вдоль оси** OY в $\frac{1}{m}$ раз.

<u>Пример 5</u>

Построить графики функций $y=2\sin x, \quad y=\frac{1}{2}\sin x$

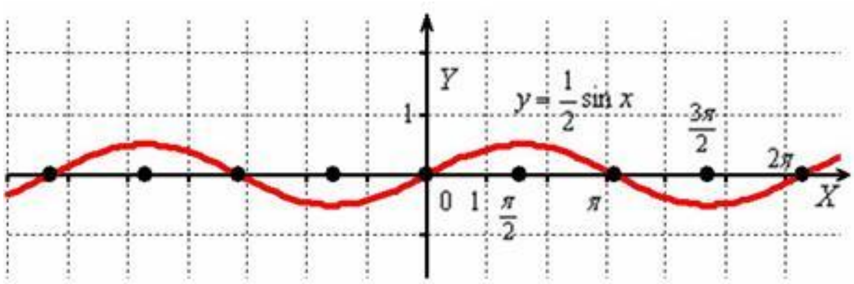


Вытягиваем график синуса $y=\sin x$ **вдоль оси** OY в 2 раза:



Значения (все, кроме нулевых) увеличились *по модулю* в два раза.

Теперь **сожмём** синусоиду **вдоль оси** OY в 2 раза:



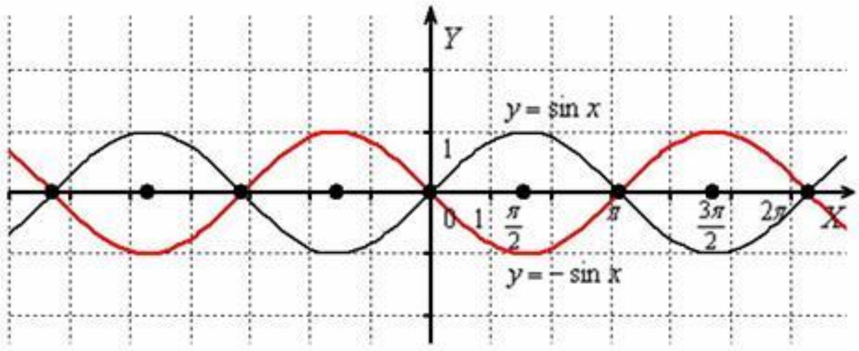
Аналогично, период $T = 2\pi$ не изменился, но область значений функции уменьшилась в два раза: $E(y) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

д) Симметричное отображение графика относительно оси абсцисс

Пример 6

Построить график функции $y = -\sin x$

Отобразим синусоиду симметрично относительно оси OX :



е) Сдвиг графика вверх/вниз вдоль оси ординат

Если к прибавляется число, то происходит сдвиг (параллельный перенос) её графика вдоль оси OY .

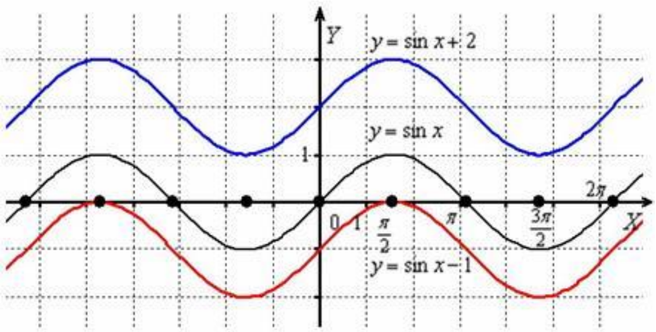
Правила:

1) чтобы построить график функции $f(x)+h$, нужно график $f(x)$ сдвинуть **ВДОЛЬ** оси OY на h единиц **вверх**;

2) чтобы построить график функции $f(x)-h$, нужно график $f(x)$ сдвинуть **ВДОЛЬ** оси OY на h единиц **вниз.**

Пример 7

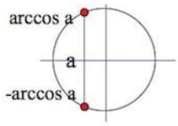
Построить графики функций $y = \sin x + 2, \quad y = \sin x - 1$



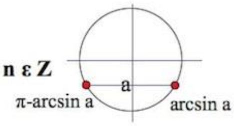
10. Решение тригонометрических уравнений

а) Формулы для решения простейших тригонометрических уравнений

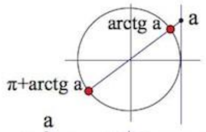
cos x=a, -1≤a≤1
x=±arccos a+2πn, n ε Z



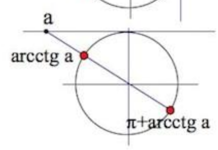
sin x=a, -1≤a≤1
x=(-1)ⁿarcsin a+πn, n ε Z или
x_1=arcsin a+2πn, x_2=π-arcsin a+2πn, n ε Z



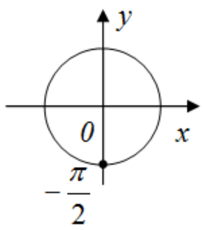
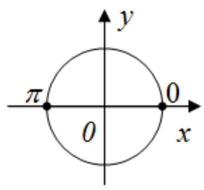
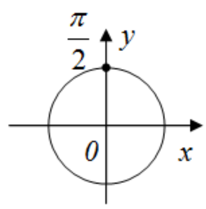
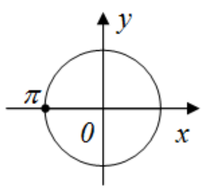
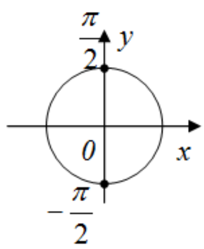
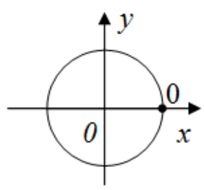
tg x=a
x=arctg a+ πn, n ε Z



ctg x=a
x=arcctg a + πn, n ε Z



б) Частные случаи:

$a=-1$ $\sin x=-1$ $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad k\in Z$	$a=0$ $\sin x=0$ $x=\pi k, \quad k\in Z$	$a=1$ $\sin x=1$ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad k\in Z$
		
$a=-1$ $\cos x=-1$ $x=\pi+2\pi k, \quad k\in Z$	$a=0$ $\cos x=0$ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad k\in Z$	$a=1$ $\sin x=1$ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, \quad k\in Z$
		

в) Основные методы решения тригонометрических уравнений

Пример 1. Преобразование к квадратному уравнению относительно какой-либо тригонометрической функции.

$\cos 4x = 6\cos^2 x - 5$

Воспользуемся формулой $\cos^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

$\cos^2 2x - \sin^2 2x = 3 + 3\cos 2x - 5$

$\cos^2 2x - 1 + \cos^2 2x = 3\cos 2x - 5$

$2\cos^2 2x - 3\cos 2x + 1 = 0$

$\cos 2x = t$

$2t^2 - 3t + 1 = 0$

$t = 1 \qquad t = \frac{1}{2}$

$\cos 2x = 1 \qquad \cos 2x = \frac{1}{2}$

$2x = 2\pi k, k \in Z \qquad 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$

$x = \pi k \qquad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$

Пример 2. Решение уравнений методом разложения на множители.

$(1-\cos 6x)\cos 2x = \sin^2 3x$

$2\sin^2 3x\cos 2x - \sin^2 3x = 0$

$\sin^2 3x(2\cos 2x - 1) = 0$

$\sin^2 3x = 0 \qquad \cos 2x = \frac{1}{2}$

$3x = \pi k, k \in Z \qquad 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

$x = \frac{\pi k}{3} \qquad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$

Пример 3. Решение однородных уравнений.

Однородными уравнениями первой и второй степени называются уравнения вида:

$a\sin x + b\cos x = 0 \qquad (1)$

$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + \cos^2 x = 0 \qquad (2)$

соответственно (a ≠ 0, b ≠ 0, c ≠ 0).

При решении однородных уравнений почленно делят обе части уравнения на cosx для (1) уравнения и на cos 2 x для (2). Такое деление возможно, так как sinx и cosx не равны нулю одновременно – они обращаются в нуль в разных точках. Рассмотрим примеры решения однородных уравнений первой и второй степени.

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=0 \quad / \ \cos x$$

$$\operatorname{tg}x-\sqrt{3}=0 \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$$

$$x=\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z$$

$$2\sin^2 2x+3\cos^2 2x=2{,}5\sin 4x$$

$$2\sin^2 2x+3\cos^2 2in2x\cos 2x=0 \quad / \ \cos^2 2x \qquad (2)$$

$$2tg^2 2x-5tgx+3=0$$

$$tg2x=t$$

$$2t^2-5t+3=0$$

$$t=\frac{3}{2} \qquad\qquad t=1$$

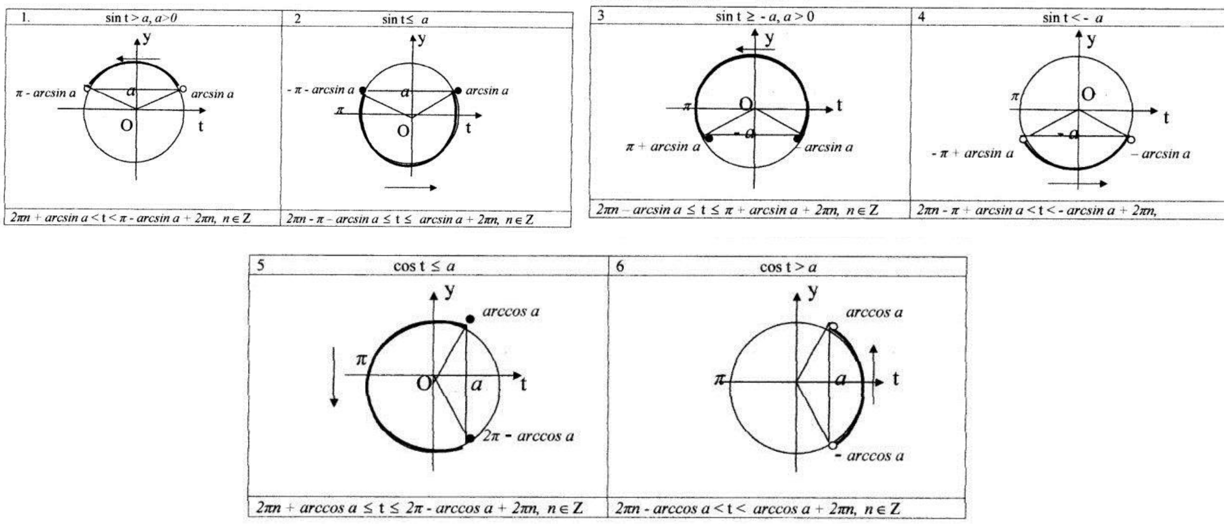
$$tg2x=\frac{3}{2} \qquad\qquad tg2x=1$$

$$2x=arktg\frac{3}{2}+\pi k, k\in Z \qquad 2x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$$

$$x=\frac{1}{2}arktg\frac{3}{2}+\pi k \qquad\qquad x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$$

10. Решение тригонометрических неравенств

Примеры основных тригонометрических неравенств.



РАЗДЕЛ 3. Производная и техника дифференцирования

Студент должен:

знать/понимать:

- понятие числовой последовательности и её предела:
- свойства сходящихся последовательностей;
- понятие бесконечной геометрической прогрессии;
- понятие предела функции на бесконечности и в точке;
- правил вычисления производных элементарных функций;
- формулы производных элементарных функций;
- понятие предела числовой последовательности и функции;
- уравнение касательной к графику функции;
- алгоритм исследования функции на монотонность и экстремумы с применением производной;
- понятие наибольших и наименьших значений величин.

уметь:

- находить предел числовой последовательности;
- находить сумму бесконечной геометрической прогрессии;
- находить предел функции на бесконечности и в точке;
- вычислять производные элементарных функций с применением формул их производных;
- находить предел числовой последовательности и функции;
- составлять уравнение касательной к графику функции;
- исследовать функции на монотонность и экстремумы с применением производной;
- строить графики функций с применением производной;
- находить наибольшее и наименьшее значение величин.

1. Формулы дифференцирования

1. $(c)'=0, \quad$ *где c – постоянная*
2. $(x^a)'=a\cdot x^{a-1}, \quad$ *отсюда* $\quad x'=1$
3. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$
4. $(e^x)'=e^x$
5. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$
6. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
7. $(\sin x)'=\cos x$
8. $(\cos x)'=-\sin x$
9. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
10. $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

2. Правила дифференцирования

обозначения: $u=u(x), \quad \upsilon=\upsilon(x)$

1. $(u+\upsilon)'=u'+\upsilon'$

2. $(u-\upsilon)'=u'-\upsilon'$

3. $(u\cdot\upsilon)'=u'\upsilon+u\upsilon'$

4. $\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)'=\dfrac{u'\upsilon-u\upsilon'}{\upsilon^2}$

5. $(Cu)'=C\cdot u' \quad (C-\text{константа})$

3. Геометрический смысл производной

ПРОИЗВОДНАЯ

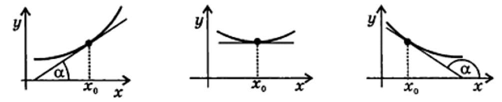
Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ к приращению аргумента Δx при $\Delta x\to 0$, если этот предел существует:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Пример: $(x^2)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в этой точке:



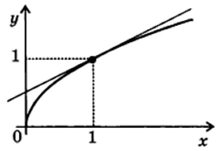
$f'(x_0)=\text{tg}\,\alpha>0 \qquad f'(x_0)=\text{tg}\,\alpha=0 \qquad f'(x_0)=\text{tg}\,\alpha<0$

УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ

к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0:

$$\boxed{y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}$$

Пример. **Нахождение уравнения касательной к графику функции $f(x)=\sqrt{x}$ в точке $x_0=1$:**



1. $f(x_0)=f(1)=1$
2. $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
3. $f'(x_0)=f'(1)=\dfrac{1}{2}$
4. $y=1+\dfrac{1}{2}(x-1)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

4. Примеры вычисления производных

Пример 1. Вычислить производную функции f(x)= $x+\sin x$.

Решение: Из правил дифференцирования выясняем, что производная суммы функций есть сумма производных функций, т. е.

$$(x+\sin x)' = x' + (\sin x)' = 1+\cos x$$

Пример 2. Найти производную функции

$$(x-5)(2x-5).$$

Решение. Применяем правило дифференцирования произведения: производная произведения двух функций равна сумме произведений каждой из этих функций на производную другой:

$$((x-5)(2x-5))' =$$
$$= (x-5)'(2x-5) + (x-5)(2x-5)'.$$

$$(2x-5)+(x-5)\bullet 2 =$$
$$= (2x-5)+(2x-10) = 4x-15.$$

РАЗДЕЛ 4. Первообразная. Интеграл

Студент должен:

Знать /понимать:

- о понятии первообразной и неопределённого интеграла;
- формулы для вычисления первообразных;
- о понятии определенного интеграла;
- формулу Ньютона-Лейбница;
- геометрический смысл определенного интеграла;

Уметь:

- вычислять неопределённые интегралы;
- Распознавать определённый интеграл и отличать его от неопределённого;
- применять формулу Ньютона - Лейбница для вычисления площади криволинейной трапеции в простейших задачах;
- вычислять площадь криволинейной трапеции с помощью первообразной.

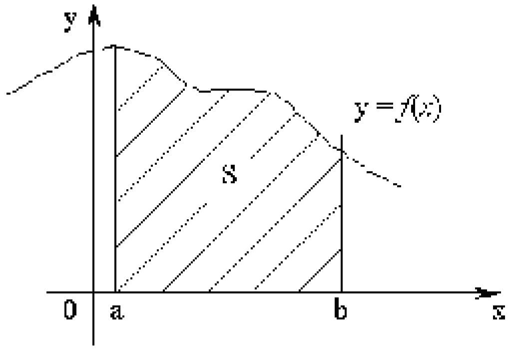
1. Таблица формул для нахождения первообразных

Функция	Первообразные	Функция	Первообразные
a	$ax+C$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
$x^p,\ p\neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$	$\sin x$	$-\cos x+C$
$\frac{1}{x},\ x>0$	$\ln x+C$	$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{x},\ x<0$	$\ln(-x)+C$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$
e^x	e^x+C	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$

2. Определенный интеграл

Определение. Разность F (b)– F (a) называется интегралом от функции f (x) на отрезке [a ; b] и обозначается так: $\int_a^b f(x)dx$, т.е. $\int_a^b f(x)dx$ = F (b)– F (a) – формула Ньютона-Лейбница.

3. Геометрический смысл интеграла.



Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a ; b] функции f (x), осью Ох и прямыми х=а и х= b:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b).$$

4. Вычисление площадей с помощью интеграла.

<u>Пример 1.</u> Вычислить интеграл $\int_1^2 (2x-3)^7 dx$

Решение:

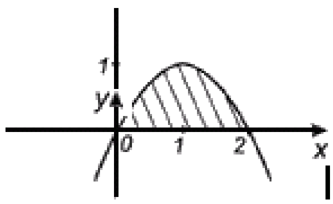
$$\int_1^2 (2x-3)^7 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-3)^8}{8}\Big|_1^2 = \frac{(2x-3)^8}{16}\Big|_1^2 = \frac{1^8}{16} - \frac{(-1)^8}{16} = \frac{1-1}{16} = 0$$

Ответ: 0.

<u>Пример 2</u>. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

а) $f(x) = 2x - x^2$ и осью абсцисс

Решение: График функции $f(x) = 2x - x^2$ парабола. Вершина: (1; 1).



$$S = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) - 0 = 1\frac{1}{3}\text{(кв. ед.)}$$

Ответ: $1\frac{1}{3}$ кв. ед.

РАЗДЕЛ 5. Корни, степени и логарифмы

Студент должен:

Знать/понимать:

- корень n-степени,
- свойства корня n-ой степени,
- логарифм, свойства логарифмов,
- логарифмические формулы,
- теорема о потенцировании,
- основные методы решения уравнений и неравенств.

Уметь:

- выполнять преобразования выражений, содержащих радикалы;
- решать простейшие уравнения, содержащие корни n-ой степени,
- применять свойства корня n-ой степени для преобразования простейших выражений, содержащих радикалы.
- Устанавливать связь между степенью и логарифмом;
- понимать их взаимно противоположное значение;
- вычислять логарифм числа по определению,
- применять логарифмические формулы для преобразования выражений,
- применять теорему о потенцировании при решении логарифмических уравнений и неравенств, находить ОДЗ уравнения, неравенства.

1. Степень с действительным показателем

a	x	a^x
$a \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{N},\quad x \geq 2$	$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x\ \text{сомножителей}}$
$a \in \mathbb{R}$	$x = 1$	$a^1 = a$
$a \in \mathbb{R},\quad a \neq 0$	$x = 0$	$a^0 = 1$
$a \in \mathbb{R},\quad a \neq 0$	$x \in \mathbb{Z},\ x < 0$	$a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$
$a \geq 0$	$x = \dfrac{m}{n},\quad m, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$a > 0$	$x = \dfrac{m}{n},\quad m, n \in \mathbb{Z},\ m < 0,\ n \geq 2$	$a^x = \dfrac{1}{a^{-x}}$
$a > 0$	$x \in \mathbb{R}$.	$a^x = \lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n}$ *)

Свойства степени с действительным показателем

Пусть $a>0,\ b>0,\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}$. Тогда верны следующие соотношения:

$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$	$(ab)^x=a^x\cdot b^x$	$a^x=a^y \underset{a\neq1}{\Leftrightarrow} x=y$
$a^x:a^y=a^{x-y}$	$(a:b)^x=a^x:b^x$	$a^x>a^y \underset{a>1}{\Leftrightarrow} x>y$
$\left(a^x\right)^y=a^{xy}$	$a^x>0$	$a^x>a^y \underset{0<a<1}{\Leftrightarrow} x<y$

2. Корень n-степени из действительного числа

Определение. Корнем n-й степени из числа a называется такое число b, n-я степень которого равна a, то есть

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt[n]{a}=b\\ b^n=a\end{array}}$$

Если n - нечетное число, то существует единственный корень n-й степени из любого числа (положительного или отрицательного).

Например, $\sqrt[3]{-8}=-2;\ \sqrt[3]{8}=2$

Если n - четное число, то существует два корня n-й степени из любого положительного числа. Например, корень четвертой степени из числа 625 - это числа -5 и 5. Так как $(5)^4=625$ *и* $(-5)^4=625$

Корень четной степени из отрицательного числа не существует.

Например, $\sqrt[2]{-16}$ – *не имеет смысла*

Пример 1

$$\sqrt{81}=9\ \left(9^2=81\right);\ \sqrt[3]{27}=3\ \left(3^3=27\right);\ \sqrt[4]{625}=5\ \left(5^4=625\right);\ \sqrt[5]{0}=0\ \left(0^5=0\right)$$

Пример 2

$$\sqrt[3]{-27}=-3\ \left((-3)^3=-27\right);\ \sqrt[99]{-1}=-1\ \left((-1)^{99}=-1\right)$$

3. Свойства корня n-й степени

$$1)\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$2)\ \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$$

$$3)\ \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$$

$$4)\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$5)\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$6)\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

РАЗДЕЛ 6. Элементы комбинаторики.

Студент должен:

Знать/понимать:

- этапы простейшей статистической обработки данных;
- перестановки, сочетания, размещения;
- событие, вероятность события;
- классическое определение вероятности;
- определение произведения двух событий;
- независимость событий.

Уметь:

- Решать простейшие вероятностные задачи;
- использовать элементы комбинаторики для подсчета вероятностей.

1. Элементы комбинаторики. Комбинаторика изучает число комбинаций из предметов.

а) Перестановки $P_n = n!$ - важен только порядок.

Пример 1. Сколькими способами можно расставить 5 различных книг на полке?

$$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 5!$$

б) <u>Размещения</u> $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ -- важен порядок.

Пример 2. Всего 10 цифр. Сколькими способами можно составить трехзначный номер?

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!} = 8\cdot 9\cdot 10 = 720$$

в) <u>Сочетания</u> $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ Разные предметы, порядок не важен.

Пример 3. В группе 20 человек. Сколькими способами можно выбрать трех делегатов на конференцию?

$$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!} = \frac{17!\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 17!} = 1140$$

2. <u>Тео́рия вероя́тностей</u> — раздел математики, изучающий случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.

Классическое определение вероятности.

Пусть имеется полная группа равновозможных несовместных событий. Их число $n.$ И пусть случайное событие A состоит из m элементарных событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

<u>Пример 1.</u> Брошена игральная кость. Какова вероятность выпадения простого числа?

Перечислим все простые числа от 1 до 6. Это 1,2,3,5.

$$m(A) = 4,\ n = 6,\ P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

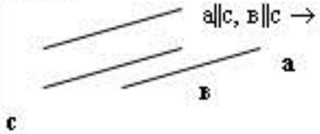
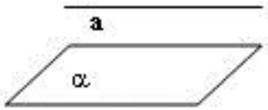
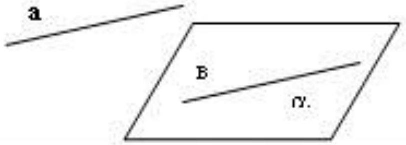
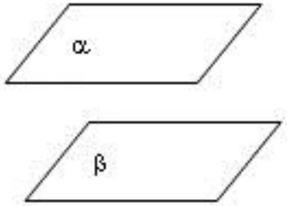
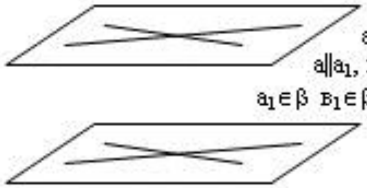
<u>Пример 2</u>. Брошен кубик два раза подряд. Какова вероятность, что оба раза выпадут четные числа?

Событие A - выпали четные числа.

2,4,6 - оба раза.

$n = 6\cdot 6 = 36$ событий. На каждую цифру №1 есть 6 возможностей цифры №2.

РАЗДЕЛ 7. Стереометрия. Краткий справочный материал

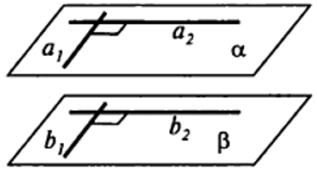
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ	
определения	**признаки**
ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ	
Опр: Прямые в пр-ве параллельны, если они не пересекаются и лежат в одной плоскости.  $a \parallel в$ $a \in \alpha,\ в \in \alpha$	**Признак:** Две прямые в пр-ве, параллельные третьей, параллельны между собой. $a \parallel c,\ в \parallel c \rightarrow a \parallel в$ 
ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ	
Опр: Прямая и плоскость параллельны, если они не пересекаются.  $a \parallel \alpha$	**Признак:** Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой пл-ти, то она параллельна и самой плоскости. $a \notin \alpha,\ в \in \alpha,\ a \parallel в \rightarrow a \parallel \alpha$ 
ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ	
Опр: Две плоскости параллельны, если они не пересекаются.  $\alpha \parallel \beta$	**Признак:** Если две пересекающиеся прямые од-ной пл-ти соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.  $a \cap в = C$ $a \parallel a_1,\ в \parallel в_1$ $a_1 \in \beta\ \ в_1 \in \beta \rightarrow \alpha \parallel \beta$

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ

Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ



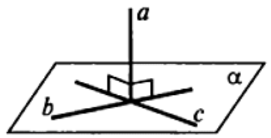
Две пересекающиеся прямые, параллельные соответственно двум перпендикулярным прямым, перпендикулярны:

$(a_1 \parallel b_1,\ a_2 \parallel b_2,\ a_1 \perp a_2) \Rightarrow b_1 \perp b_2$.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, принадлежащей плоскости и проходящей через точку пересечения.

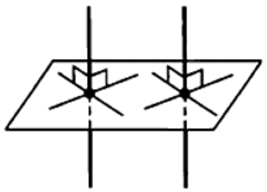
ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым данной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости:

$(a \perp b$ и $a \perp c) \Rightarrow a \perp \alpha$.

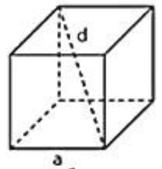
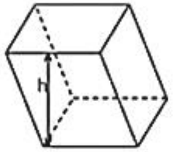
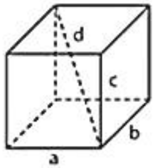
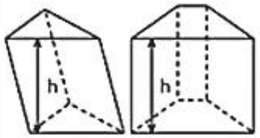
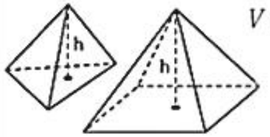
ПРЯМЫЕ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПЛОСКОСТИ



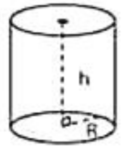
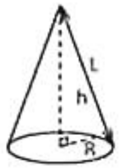
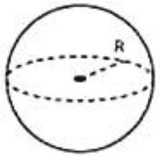
Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна данной плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

МНОГОГРАННИКИ

ОБЪЁМЫ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 куб $V = a^3$ a – ребро куба	$S = 6a^2$ $d = a\sqrt{3}$ длина диагонали
 параллелепипед $V = S_{осн} \cdot h$	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$ $S_{осн}$ – площадь основания h – высота
 прямоугольный параллелепипед $V = a \cdot b \cdot c$	$S = 2ab + 2ac + 2bc$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 призма $V = S_{осн} \cdot h$	$S = 2S_{осн} + S_{бок}$ $S_{осн}$ – площадь основания h – высота
 пирамида $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S = S_{осн} + S_{бок}$

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

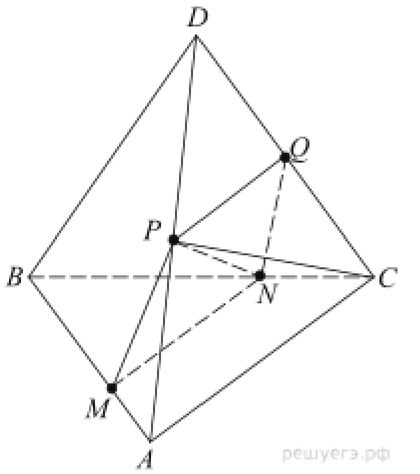
ОБЪЁМ	ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ
 цилиндр $V = \pi R^2 h$ R – радиус основания h – высота	$S = 2S_{осн} + S_{бок} =$ $= 2\pi R^2 + 2\pi R h$
 конус $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S = S_{осн} + S_{бок} = \pi R^2 + \pi R L$ L – образующая $L = \sqrt{R^2 + h^2}$
 шар $V = \frac{4}{3} \pi R^3$	$S = 4\pi R^2$

<u>Задача1.</u> На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : BM = CN : NB = 1 : 2$. Точки P и Q — середины сторон DA и DC соответственно.

а) Докажите, что P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Найти отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

Решение.



а) Треугольник ABC подобен треугольнику MBN по двум пропорциональным сторонам и углу между ними. Тогда углы BAC и BMN равны, и $AC \parallel MN$. Далее, $PQ \parallel AC$ поскольку является средней линией треугольника ADC. Значит, $MN \parallel PQ$ и поэтому P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Пусть объём $ABCD$ равен V. Пятигранник $APMCQN$ состоит из четырёхугольной пирамиды $PACNM$ с основанием $ACNM$ и треугольной пирамиды $PQCN$ с основанием QCN. Выразим их объемы через V.

Расстояние от P до (BCD) вдвое меньше расстояния от A до (BCD), а площади треугольников QCN и BCD относятся как $1 : 6$. Значит, $V_{PQCN} = \frac{V}{12}$.

Площадь треугольника MBN составляет $\frac{4}{9}$ площади ABC. Значит, $\frac{S_{ACNM}}{S_{ABC}} = \frac{5}{9}$. Расстояние от точки P до (ABC) вдвое меньше расстояния от D до (ABC), поэтому $V_{PACNM} = \frac{5V}{18}$.

Таким образом, $V_{APMCQN} = \frac{13V}{36}$, то есть $\frac{V_{APMCQN}}{V_{BMNDPQ}} = \frac{13}{23}$.

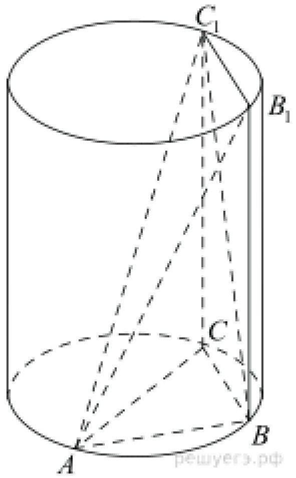
Ответ: 13 : 23.

<u>Задача 2.</u> В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания — точки B_1 и C_1, причем BB_1 — образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что угол ABC_1 прямой.

б) Найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1, если $AB = 8$, $BB_1 = 6$, $B_1C_1 = 15$.

Решение.



а) Рассмотрим плоскость, проходящую через ось цилиндра и прямую AC_1. Обозначим точку пересечения этой плоскости и окружности основания цилиндра, содержащую точку A, через точку C. Тогда CC_1 — образующая цилиндра. Отрезок AC пересекает ось цилиндра. Значит, он проходит через центр окружности основания цилиндра, то есть является ее диаметром. Следовательно, угол ABC прямой.

Прямая CC_1 является образующей цилиндра, поэтому она перпендикулярна прямой AB. Таким образом, прямая AB перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости BCC_1 (BC и CC_1), а значит, прямая AB перпендикулярна плоскости BCC_1 и любой прямой, лежащей в этой плоскости. Значит, угол ABC_1 прямой.

б) Поскольку прямые BB_1 и CC_1 параллельны, искомый угол равен углу AC_1C.

Треугольники ABC и ACC_1 являются прямоугольными, поэтому:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + B_1C_1^2} = 17; \quad \operatorname{tg}\widehat{AC_1C} = \frac{AC}{CC_1} = \frac{AC}{BB_1} = \frac{17}{6}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{17}{6}$.

Содержание самостоятельной работы студентов

Наименование раздела, темы	Виды	Объем часов
Раздел 1. Основы тригонометрии Повторение 1.2 Радианная мера угла. Вращательное движение. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа. 1.3 Основные тригонометрические тождества, формулы приведения. 1.4 Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов 1.5 Синус и косинус двойного угла. 1.6 Формулы половинного угла. Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму. 1.7 Преобразования простейших тригонометрических выражений**.** 1.8 Определения функций, их свойства и графики 1.9 Тригонометрические функции 1.10 Преобразование графиков тригонометрических функции 1.11 Простейшие тригонометрические уравнения 1.12 Решение тригонометрических уравнений 1.13 Простейшие тригонометрические неравенства	1. Составить таблицу из ключевых слов и понятий темы «Основы тригонометрии». 2. Оформить личный справочник основных формул тригонометрии. 3. Выполнение номеров в задачнике (Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10-11 классы. Алгебра и начала математического анализа. В 2 ч. Ч. 2. Учеб. для учащихся общеобразовательных организаций (базовый уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 3-е изд., стер.- Мнемозина, 2015. – 448с. : ил.)	27
Раздел 2. Производная. Техника дифференцирования 2.1Понятие о пределе последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. 2.2 Производная. Понятие о производной функции, её геометрический и физический смысл. 2.3 Производные суммы, разности 2.4 Производная произведения. Производная частного 2.5 Производная сложной функции 2.6 Уравнение касательной к графику функции 2.7 Применение производной к исследованию функций и построению графиков. 2.8 Вторая призводная, ее геометрический и физический смысл 2.9 Нахождение скорости для процесса, заданного формулой и графиком	1. Решение номеров в задачнике (Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10-11 классы. Алгебра и начала математического анализа. В 2 ч. Ч. 2. Учеб. для учащихся общеобразовательных организаций (базовый уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 3-е изд., стер.- Мнемозина, 2015. – 448с. : ил. 2. Составить таблицу производных. 3. Составить алгоритм решения задач на исследование функций с помощью производной.	12

Раздел 3. Первообразная. Интеграл 3.1 Первообразная. 3.2 Формула Ньютона—Лейбница. 3.3 Интеграл 3.4 Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции.	1.Составить таблицу интегралов. 2. Выполнить задания типового расчета по теме «Неопределенный и определенный интеграл» 3. Подготовить сообщение "Применение интегралов в различных областях знаний" 4. Практическая работа по задачнику Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10-11 классы. Алгебра и начала математического анализа. В 2 ч. Ч. 2. Учеб. для учащихся общеобразовательных организаций (базовый уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 3-е изд., стер.- Мнемозина, 2015. – 448с. : ил	6
Раздел 4. Корни, степени и логарифмы 4.1Корни и степени. Корни натуральной степени из числа и их свойства 4.2Степени с рациональными показателями, их свойства 4.3Степени с действительными показателями. Свойства степени с действительным показателем. 4.4Преобразование рациональных и иррациональных выражений 4.5Решение показательных уравнений и неравенств 4.6Логарифм. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество.Десятичные и натуральные логарифмы. Правила действий с логарифмами. Переход к новому основанию. 4.7Решение логарифмических уравнений 4.8 Решение логарифмических неравенств 4.9**ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ**	1. Составление конспекта 2. Решение примеров, уравнений и неравенств в задачнике 3. Оформить личный справочник 4. Выполнение номеров в задачнике Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10-11 классы. Алгебра и начала математического анализа. В 2 ч. Ч. 2. Учеб. для учащихся общеобразовательных организаций (базовый уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 3-е изд., стер.- Мнемозина, 2015. – 448с. : ил. **(задачник)**	17
Раздел 5. Элементы комбинаторики 5.1Основные понятия комбинаторики. 5.2Решение задач на перебор вариантов 5.3Формула Бинома Ньютона.	1.Составить конспект из ключевых слов и понятий темы. 2. Составить алгоритмы решения задач на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний 3. Выполнение номеров в задачнике Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10-11 классы. Алгебра и начала математического анализа. В 2 ч. Ч. 2. Учеб. для учащихся общеобразовательных организаций (базовый уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 3-е изд., стер.- Мнемозина, 2015. – 448с. : ил.	5

Раздел 6. Элементы теории вероятностей 6.1 События, вероятность события 6.2 Сложение и умножение вероятностей	1.Проанализировать числовые данные, представленные в виде таблицы, диаграммы, графика. 2. Решить задачи на определение вероятности 3. Решение задач в задачнике Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10-11 классы. Алгебра и начала математического анализа. В 2 ч. Ч. 2. Учеб. для учащихся общеобразовательных организаций (базовый уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 3-е изд., стер.- Мнемозина, 2015. – 448с. : ил.	3
Раздел 7. Прямые и плоскости в пространстве 7.1Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность плоскостей 7.2Параллельность прямой и плоскости. 7.3Перпендикулярность прямой и плоскости. 7.4Перпендикулярность двух плоскостей 7.5Двугранный угол. 7.6Перпендикуляр и наклонная 7.7Геометрические преобразования пространства. 7.8Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур.	1. Составить опорный конспект по теме «Площади плоских геометрических фигур» 2. Решить задачи на вычисление элементов плоских фигур; на вычисление площадей плоских фигур. 3. Изготовить модели типовых задач (индивидуальные и групповые задания). 4.Практическая работа по учебнику Геометрия, 10-11: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни, Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. - М.: Просвещение, ОАО "Московские учебники", 2012	11
Раздел 8. Координаты и векторы 8.1Основные понятия. Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве. 8.2Формула расстояния между двумя точками. 8.3Уравнения сферы 8.4Векторы. Модуль вектора. Равенство векторов. 8.5Сложение векторов. Умножение вектора на число. 8.6Разложение вектора по направлениям. 8.7Угол между двумя векторами. 8.8Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов. 8.9Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач	1. Составить таблицу из ключевых слов и понятий темы «Координаты и векторы» 2. Составить конспекты по темам «Векторы. Действия с векторами», «Координаты вектора на плоскости 3. Практическая работа по учебнику Геометрия, 10-11: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни, Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. - М.: Просвещение, ОАО "Московские учебники", 2012	15

Раздел 9. Многогранники 9.1Многогранные углы. Многогранники. 9.2Параллелепипед. Куб 9.3Призма. Прямая и наклонная призма. Правильная призма. 9.4Пирамида. Правильная пирамида. 9.5Усеченная пирамида. Тетраэдр. 9.6Симметрия в многогранниках 9.7Сечения куба, призмы и пирамиды. 9.8Правильные многогранники	1. Составить таблицу из ключевых слов и понятий темы. 2. Выполнить задания типового расчета по теме «Многогранники» 3. Изготовить модели многогранников 4. Практическая работа по учебнику.	18
Раздел 10. Тела и поверхности вращения 10.1Тела вращения. Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. 10.2Конус. Основные элементы конуса 10.3Усеченный конус. 10.4Осевые сечения и сечения, параллельные основанию. 10.5Цилиндр.Осевые сечения и сечения, параллельные основанию. 10.6Конус. Осевые сеченияи сечения, параллельные основанию. 10.7Шар и сфера, их сечения.	1. Составить таблицу из ключевых слов и понятий темы. 2. Выполнить задания типового расчета по теме «Тела и поверхности вращения» 3. Практическая работа по учебнику	15
Раздел 11. Измерения в геометрии 11.1Поверхность многогранников 11.2Полная поверхность цилиндра и конуса 11.3Объем и его измерение. Интегральная формула объема. 11.4Объем куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, пирамиды. 11.5**Определение объема цилиндра и конуса.** Определение объема шара и площади сферы. 11.6Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел.	1.Составить таблицу из ключевых слов и понятий темы. 2.Выполнить задания типового расчета по теме «Тела и поверхности вращения» 3. Практическая работа по учебнику	10
12.1 Выполнение самостоятельных индивидуальных зачетных работ (повторение курса Математика: алгебра, геометрия, начало математического анализа)		3

ВСЕГО: 142 часа